Santos, J & Santos, L (2025) Una Aproximación Etnomatemática a la Idea de Infinito. *Revista Latinoamericana de Etnomatematicas,*18(1), 42-58
DOI: https://doi.org/10.22267/relatem.25181.110

Una Aproximación Etnomatemática a la Idea de Infinito

An Ethnomathematical Approach to the Idea of Infinity

Jorge Alejandro Santos [1]

Lucí dos Santos Bernardi [2]

Resumen

En este artículo se propone una aproximación a la idea de infinito desde una perspectiva etnomatemática. La hipótesis surge a partir del trabajo con un grupo de estudiantes en las Licenciaturas Interculturales Indígenas que se desarrollan en las Tierras Indígenas del pueblo Kaingang, Santa Catarina, Brasil. A partir de la discusión sobre la traducción de ciertas palabras de la lengua indígena, y especialmente sobre "*goj-vêhn*" que literalmente significa "agua sin fin", es decir, un concepto que involucra una noción de infinito, proponemos un acercamiento a este concepto que intenta explicar cómo una lengua que tiene solo cinco números: *pir, régre, tãgtu*, *venhlãgra y péntar*, (uno, dos, tres, cuatro y cinco) tiene además la noción de infinito. Como el concepto aparece desligado de palabras que se refieren a cantidades, es decir, no se usa para referirse a la cantidad, nuestra hipótesis postula un sentido lógico-lingüístico de esta noción que tratamos de explicitar, relacionándolo con algunas discusiones en torno al concepto de infinito dentro del pensamiento filosófico, lógico y matemático en la tradición occidental. El artículo está estructurado en tres momentos en los cuales se aborda una aproximación a la noción de infinito actual, una aproximación a la noción de infinito potencial y un análisis a la concepción de infinito presente en el lenguaje de la comunidad kaingang.

Palabras clave: Etnomatemática, infinito, Cultura kaingang, lógica, paradojas.

Abstract

In this paper we propose an approach to the idea of infinity from an ethnomathematical perspective. The hypothesis arises from a work with a group of students of the Indigenous Intercultural Degrees that Unochapecó develops in the Indigenous Lands of the Kaingang people. Starting from the discussion about the translation of certain words of the indigenous language, and especially about "goj-vêhn" which literally means "endless water", that is, a concept that involves a notion of infinity, we propose an approach to this concept that tries to explain how a language that has only five numbers: pir, régre, tãgtu, venhlãgra and pentar, (one, two, three, four and five) also has the notion of infinity. As the concept appears detached from words that refer to quantities, that is, it is not used to refer to quantity, our hypothesis postulates a logical-linguistic sense of this notion that we try to make explicit, relating it to some discussions around the concept of infinity within philosophical, logical, and mathematical thought in the Western tradition. The article is structured in three sections,

[1] Doctor en Filosofía por la Universidad de Buenos Aires (UBA), Investigador en la Universidad Nacional de Hurlingham (UnaHur), Buenos Aires, Argentina. E-mail: jorgesantosuba@gmail.com

[2] Doctora en Educación Científica y Tecnológica por la Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Investigadora en la Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões (URI/FW), Brasil. E-mail: lucisantosbernardi@gmail.com.

addressing an approach to the notion of actual infinity, an approach to the potential infinity and analysis of the conception of infinity present in the language of the Kaingang community.

Key words: Ethnomathematics, infinity, Culture kaingang, logic, paradoxes.

Resumo

Neste artigo propomos uma abordagem da ideia de infinito a partir de uma perspectiva etnomatemática. A hipótese surge de um trabalho com um grupo de alunos dos Graus Interculturais Indígenas que a Unochapecó desenvolve nas Terras Indígenas do povo Kaingang. Partindo da discussão sobre a tradução de certas palavras da língua indígena, e principalmente sobre "goj-vêhn" que literalmente significa "água sem fim", ou seja, um conceito que envolve uma noção de infinito, propomos uma abordagem desse conceito que tenta explicar como uma linguagem que tem apenas cinco números: pir, régre, tãgtu, venhlãgra e pentar, (um, dois, três, quatro e cinco) também tem a noção de infinito. Como o conceito aparece desvinculado de palavras que se referem a quantidades, ou seja, não é usado para se referir a quantidade, nossa hipótese postula um sentido lógico-linguístico dessa noção que tentamos explicitar, relacionando-a com algumas discussões em torno do conceito do infinito dentro do pensamento filosófico, lógico e matemático na tradição ocidental. O artigo está estruturado em três momentos em que se aborda a concepção de infinito real, a concepção de infinito potencial e uma análise da concepção de infinito presente na linguagem da comunidade Kaingang.

Palavras-chave: Etnomatemática, infinito, Cultura kaingang, lógica, paradoxos.

Résumé

Dans cet article, nous proposons une approche de l'idée d'infini dans une perspective ethnomathématique. L'hypothèse découle d'un travail avec un groupe d'étudiants des diplômes interculturels indigènes qu'Unochapecó développe dans les terres indigènes du peuple Kaingang. Partant de la discussion sur la traduction de certains mots de la langue indigène, et notamment sur "goj-vêhn" qui signifie littéralement "eau sans fin", c'est-à-dire un concept qui implique une notion d'infini, nous proposons une approche de ce concept qui tente d'expliquer comment une langue qui n'a que cinq nombres: pir, régre, tãgtu, venhlãgra et pentar, (un, deux, trois, quatre et cinq) a aussi la notion d'infini. Comme le concept apparaît détaché des mots qui font référence à des quantités, c'est-à-dire qu'il n'est pas utilisé pour faire référence à la quantité, notre hypothèse postule un sens logico-linguistique de cette notion que nous essayons d'expliciter, en le reliant à certaines discussions autour du concept de l'infini dans la pensée philosophique, logique et mathématique de la tradition occidentale. L'article est structuré en trois sections, abordant d'abord une approximation de l'infini actuel, puis de l'infini potentiel, et enfin la conception présente dans la langue de la communauté Kaingang.

Mots clés: Ethnomathématique, infini, kaingang, logique, paradoxes.

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo propondremos una aproximación a la noción de infinito desde una perspectiva etnomatemática y etnolingüística. Está hipótesis ofrece una perspectiva original de la noción de infinito; noción sobre la que existe una enorme discusión histórica tanto en aspectos filosóficos como matemáticos.

La conjetura surge a partir de un trabajo y una discusión con un grupo de estudiantes de las Licenciaturas Interculturales Indígenas que la Unochapecó (Universidad Comunitaria de la Región de Chapecó) desarrolla en las Tierras Indígenas del pueblo Kaingang, en el oeste del estado de Santa Catarina, Brasil, para la formación de profesores indígenas que actúan en las escuelas de la comunidad. En este programa se da especial espacio e importancia a la perspectiva etnomatemática, evidenciado en investigaciones realizadas sobre Etnomatemática y Pedagogía Freireana (Bernardi y Santos, 2018), el desarrollo de una interpretación Lógico-Matemática para la Dualidad Kaingang (Santos y Bernardi, 2019; Bernardi y Santos, 2021) y el estudio de Algoritmos y Sistemas de Parentesco con estudiantes de pregrado (Santos et al., 2020). La discusión sobre la traducción de ciertas palabras en la lengua indígena y específicamente, en la adaptación de la lengua indígena a nuevos artefactos tecnológicos o situaciones para los que originalmente, no tienen nombres o palabras, por lo que había que tomar préstamos de otras lenguas o adaptar las ya existentes. En ese contexto surgió la discusión, a modo de ejemplo, sobre el significado de la palabra Goio-Ên (*goj-vêhn)*[3] que es un topónimo de origen indígena cercano a la Aldea y que se utiliza para nombrar al río Uruguay en la lengua indígena. El profesor de origen no indígena creía que significaba "agua fría", pero fue corregido por lo estudiantes que señalaron que, significa río o, literalmente, "agua (*goj*) sin fin (*vêhn*)", o "agua sin borde", refiriéndose a la propiedad del agua del río de fluir indefinidamente en una dirección sin encontrarse con un límite o borde. El predicado kaingang *"vêhn"* que en ese contexto significa "sin fin" o "sin borde", es traducible, según consultas con los hablantes nativos como infinito, que puede entenderse como "sin fin", pero también sin-límite o sin-borde.

Es importante destacar el hecho de que en la lengua kaingang existen solo cinco números: *pir, régre, tãgtu, venhlãgra* y *péntar*, que se traducen literalmente como uno, dos, tres, cuatro y cinco. Para cantidades mayores existe la palabra *tikar* que, de acuerdo con el contexto puede significar muchos, bastantes, suficientes y/o todos. Este bagaje de números y cuantificadores resultaba adecuado para un pueblo tradicionalmente cazador y recolector. Por otra parte, existe

[3] De acuerdo con la grafía actual de la lengua kaingang "*goj-vêhn"* sería forma de escritura correcta.

al menos una palabra que significa "sin fin", "sin borde" o "sin límite" conceptos que se puede relacionar con la noción de infinito. Sin embargo, como veremos, la noción aparece desligada de las palabras que se refieren a cantidades, es decir, parece no tener relación ni usarse en cuestiones vinculadas a la cardinalidad. Esta peculiaridad, la austeridad de conceptos numéricos por un lado y la presencia de la idea de infinito por el otro, nos impulsó a proponer una aproximación etnomatemática a la idea o concepto de infinito, bajo la hipótesis de que esta perspectiva puede brindarnos algún *insigth* novedoso sobre este concepto, quizás sobre su noción más simple y primaria. Conjeturamos que hay algunos aspectos que no han sido tenidos en cuenta en torno a esta noción y que pueden iluminarse con una aproximación como la propuesta. Para esto, se hará una breve exposición de las posiciones más relevantes para el estudio de la noción filosófica y matemática de infinito, de su relación con el lenguaje y sus paradojas y, finalmente, se sostendrá que la presencia de una palabra equivalente (o traducible como) infinito en la lengua kaingang nos deja una suerte de mensaje encriptado sobre este concepto que intentaremos descifrar.

2. METODOLOGÍA

Como señalamos se intenta indagar sobre aspectos simples pero importantes de la noción de infinito. Russell sostiene que existen dos direcciones de análisis para los conceptos matemáticos:

> La dirección más corriente es la constructiva, y camina gradualmente hacia una mayor complejidad (...) La otra dirección, menos familiar, procede por análisis, aumentando gradualmente la abstracción y simplicidad lógica: en lugar de preguntar qué es lo que podemos definir y deducir partiendo de lo admitido inicialmente, nos preguntamos que ideas y principios más generales pueden hallarse, mediante los cuales pueda definirse, o deducirse lo que habíamos tomado como punto de partida. Este hecho de seguir la dirección inversa es lo que caracteriza la filosofía matemática como opuesta a la matemática ordinaria" (Russell, 1956, p. 73).

Entraremos entonces en el campo de la filosofía de las matemáticas aumentando la simplicidad lógica del análisis, pero lo haremos desde una perspectiva etnomatemática que consiste en:

> Observación de las prácticas de poblaciones diferenciadas, no necesariamente indígenas […]. Entonces el método de trabajo en etnomatemáticas es una observación de práctica de grupos naturales diferenciados e intentar de ver qué hacen, lo que hacen, que ellos hagan una narrativa de sus prácticas, después un análisis del discurso. Esta sería la metodología del trabajo más común (Blanco-Alvarez, 2008, p. 22).

Autores como Gilmer (1995, p. 188), a partir de las ideas de Ubiratan D'Ambrosio, sostiene que el campo de la investigación estnomatemática consiste en “el estudio de las técnicas matemáticas utilizadas por grupos culturales identificados para entender, explicar y manejar problemas y actividades que nacen de su propio medio ambiente”. Es cierto que el concepto de etnomatemática inicialmente buscó indagar sobre las matemáticas occidentales en comparación con prácticas que, en sentido muy amplio, podrían entenderse como matemáticas en otras culturas: el arte o la técnica (techné) de explicar, comprender, actuar en la realidad (mathema), dentro de su propio contexto cultural (etno). Sin embargo, D’Ambrósio no pretendía que el concepto quede atrapado en este sentido inicial, por lo que propuso la idea de Programa de Etnomatemáticas:

> Me gusta referirme a la Etnomatemática como un Programa. Efectivamente, no es una disciplina nueva, pues nace de una inconformidad con la fragmentación del conocimiento [...] Lo que yo llamo Programa de Etnomatemática es un Programa de Investigación en el sentido lakatosiano que ha ido creciendo en repercusión y ha ha demostrado ser una alternativa válida para un programa de acción pedagógica[4] (D’Ambrósio, 1993, p. 5).

El sentido entonces no tiene por qué restringirse a un punto de partida: “Por eso lo llamo programa, y en este programa me inspiré en Lakatos porque el programa lleva consigo esta cosa dinámica. No es algo terminado. No te da una teoría final.”[5] (D'Ambrósio citado en Miarka, 2011, p. 65). Esta idea de que un programa de investigación implica una dinámica sin un cierre final, ni una teoría totalmente acabada, tiene incluso familiaridad con el tema de investigación propuesto y con la información compartida por los kaingang sobre “*goj -vêhn”*. En este sentido no hemos encontrado trabajos dentro del programa de la etnomatemática que aborden la noción de infinito actual o potencial desde las culturas y lenguas originarias de América, hemos encontrado trabajos que abordan la noción de infinito en arte y su relación con culturas originarias (Cruz-Artieda, 2016) o trabajos históricos que recontruyen conceptos abstractos e ideas cercanas al infinito en las culturas mencionadas (Cancino, 2018) por lo que este trabajo sería un aporte original al programa etnomatemático. Por otra parte, este estudio contribuye a resaltar la presencia de concepciones matemáticas en diversas culturas incluso ágrafas como la estudiada, poniendo el acento de que incluso los conceptos matemáticos más sofisticados no son propiedad exclusiva de una cultura o sociedad determinada como la occidentai-moderna, sino que son un acervo de toda la humanidad.

[4] Traducción de los autores.
[5] Traducción de los autores.

En este sentido analizaremos la existencia y utilización de la idea de "*goj -vêhn"* en la lengua kaingang y las conclusiones extraídas a partir de consultas e información recopilada sobre este concepto, siempre con la idea de ir en un camino de abstracción y simplicidad.

3. EL INFINITO EN LA TRADICIÓN OCCIDENTAL: POTENCIA Y ACTO

La noción aristotélica de infinito en tanto acto o potencia, es decir sobre lo potencial o actualmente infinito fue aceptada hasta el siglo XIX:

> La potencia y el acto, respecto del infinito, del vacío y de todos los seres del género se entienden de otra manera que respecto de la mayoría de los demás seres tales como lo que se ve, lo que anda o lo que es visto. En estos casos la afirmación de la existencia puede ser verdadera, ya absolutamente, ya en tal circunstancia dada. Visible se dice, o de lo que es visto realmente, o de lo que puede ser visto. Pero la potencia respecto del infinito es de una naturaleza tal que el acto jamás puede realizarse, como no sea por el pensamiento (Aristóteles, 350 a.c/1999, 11.6).

Según el Estagirita lo infinito es concebible de manera abstracta, pero no realizable en acto, por lo que la afirmación de su existencia actual no puede ser verdadera. Una cantidad es finita, pero puede aumentar siempre hasta superar cualquier cantidad prefijada, es decir es potencialmente infinita, siempre puede ser mayor (o menor para lo infinitamente pequeño), siempre puede haber uno más. El infinito en potencia (potencial), así entendido es concebible desde lo abstracto, pero nunca alcanzable o realizable en acto. El conjunto de los números naturales es potencialmente infinito porque dado cualquier número n siempre existe $n+1$, y para $n+1$, existe $n+1+1$... y, este procedimiento puede repetirse, potencialmente, sin fin. Sin embargo, para la concepción aristotélica nunca se podrían tener a todos los números naturales juntos, es decir, la infinitud en acto sería imposible para cualquier ser o conjunto de seres, incluso los números. El infinito actual implica la idea de un hecho acabado, realizado, no en potencia y Aristóteles lo señala como una idea concebible, hoy diríamos concebible en el límite, pero irrealizable en acto. En matemáticas esta concepción implicaba, por ejemplo, que no podían reunirse los números naturales en una única totalidad, la infinitud de los naturales es siempre potencia, posibilidad de aumentar, pero nunca una realidad actualmente existente.

Quien desarrolló una teoría para manipular conjuntos infinitos como una única totalidad o como un todo (por ejemplo, el conjunto completo de los naturales) es Georg Cantor:

> Es en el transcurso de muchos años de esfuerzos e investigaciones científicas que me he visto impulsado lógicamente, casi contra mi voluntad (pues se opone a tradiciones que llegaron a ser muy apreciadas por mí), al punto de vista de considerar lo infinitamente grande sólo en forma de algo creciente sin límites (…), sino también fijarlo matemáticamente por medio del número en forma determinada de lo completamente infinito (Cantor, 1883/2006, p. 97).

Cantor introduce la noción de infinito actual a través de conjuntos infinitos, de la reunión ilimitada de objetos de "nuestra intuición o nuestro pensamiento" en un "agregado" o conjunto: "Por un 'agregado' entendemos cualquier reunión en un todo M, de objetos bien definidos *m,* de nuestra intuición o nuestro pensamiento. Estos objetos son llamados los 'elementos' de M" (Cantor, 1895, p. 481). Esta definición de conjunto es también llamada el principio de comprensión intuitiva, e implica en palabras más simples que cualquier predicado bien definido permite formar un conjunto. Aquí nos interesa señalar dos cuestiones: una la importancia del momento de la definición ("bien definidos") y que de este principio se desprende que un conjunto es un objeto en sí mismo: los elementos al formar un todo forman también una unidad de la cual se puede predicar (Da Silva, 2013).

La idea de Cantor propuesta a finales del siglo XIX para operar con conjuntos actualmente infinitos fue el concepto de función biyectiva (inyectiva y sobreyectiva), es decir, la idea de una relación exhaustiva y uno-a-uno entre conjuntos. Con más exactitud: Una función f definida sobre un conjunto A y con valores en un conjunto B es biyectiva si (1) f relaciona cada dos elementos diferentes de A, con dos valores diferentes de B, y (2) cada elemento en B está relacionado con uno de A (Tamariz, 2002). Si es posible establecer una relación biyectiva entre los conjuntos A y B, es decir si cada elemento de A está relacionado sólo con uno de B y viceversa, entonces decimos que A y B son equivalentes o tienen la misma cantidad de elementos. Esto permite hacer inferencias transfinitas sin riesgo y demostrar que, por ejemplo, el cardinal de los números pares es igual al de los enteros e, incluso, igual al de los racionales pero menor que el de los reales o que $\aleph = \aleph+1$. Estas ideas le valieron a Cantor críticas, disputas intelectuales y detractores notables como el prestigioso Leopold Kronecker. Al otro lado David Hilbert será uno de los principales defensores de sus ideas, sus palabras son famosas: "En mi opinión, el sistema de Cantor constituye no sólo la flor más admirable que el espíritu humano ha producido, sino igualmente uno de los logros más elevados de la actividad intelectual humana en general (…) Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros" (Hilbert, 1993, p. 91-96).

Una de las propiedades más interesantes de los conjuntos o clases infinitas definidas por Cantor es que se trata de clases reflexivas, para el objetivo de este trabajo esta propiedad es importante. Pues, una clase reflexiva es una clase coordinable con una parte auténtica (una parte no coincidente con el total) de la misma. Es decir, la cantidad o cardinalidad de elementos de toda la clase será igual a la de alguna de sus partes. En particular el cardinal del conjunto de los números naturales es igual (coordinable) con el de los números pares, es decir ambos tienen la misma cantidad de elementos. Esta propiedad fue utilizada por Leibniz como prueba de que la existencia de números infinitos era imposible, pues se creía contradictorio que “la parte puede ser igual al todo”. Sin embargo, si igual se entiende como “coordinable”, en el sentido de establecer una función biyectiva, la contradicción desaparece, pues un conjunto infinito puede tener partes coordinables consigo mismo (Russell, 1956).

Es interesante detenernos en la propiedad de reflexividad y en uno de los ejemplos más notables dado por el propio Russell, el mapa de Royce: propone hacer un mapa de Inglaterra sobre una parte de la propia Inglaterra. Si el mapa está perfectamente hecho, proporcionará una perfecta correspondencia de uno a uno con su original, de este modo nuestro mapa (parte de Inglaterra), estaría en una correspondencia uno a uno con el todo. La parte deberá tener el mismo número de puntos que el todo, este número sería entonces un número reflexivo. Pero el mapa debería tener un mapa del mapa, que bebería tener un mapa del mapa del mapa y así sucesivamente *ad infinitum.*

Este ejemplo incorpora a nuestra discusión la idea de representación porque, además de la existencia real o no del infinito actual o potencial, está presente un problema de tipo epistemológico: que exista el infinito actual es distinto del problema de acceder epistemológicamente a él, es decir: conocerlo y representarlo en una teoría. Históricamente se ha formulado en estos términos: el intelecto humano es finito entonces no puede conocer otra cosa que no sea finita, en el ámbito de lo matemático se entendía tácitamente por finitud del entendimiento, que su capacidad para la formación de números está limitada a los números finitos. Este argumento será reconsiderado a la luz de los desarrollos de Cantor de su teoría de conjuntos infinitos y de la posibilidad de realizar inferencias transfinitas.

Sin embargo, el propio Cantor reconoce límites epistémicos en su teoría. Tanto Cantor como Frege partieron del principio de comprensión intuitiva, es decir, el principio según el cual una propiedad genera un conjunto, o, dicho en otras palabras, toda entidad intensional genera una entidad extensional. Para Cantor, este principio era un fundamento sólido de la Teoría de conjuntos. Pero considerar que toda propiedad genera un conjunto llevó a paradojas como ya famosa descubierta por Russell en 1902[6] y anticipadas por Cantor en sus propias paradojas,

[6] Si bien no parece haber una conexión evidente entre la noción de infinito actual y la paradoja de Russell el propio autor inglés señala como intuyó desde el principio esa conexión: “Cantor tenía una demostración de que no existe un número máximo, y a mí me parecía que el número de todas las cosas en el mundo tenía que ser el máximo posible. De acuerdo a ello, examiné su demostración con cierta minuciosidad, e hice un esfuerzo por aplicarla a la clase de todas las cosas que existen. Esto me condujo a considerar a las clases que no son miembros de sí mismas, y a preguntar si la clase de tales clases eso no es un miembro de sí misma. Encontré que cualquier respuesta implica su contraria” (Russell, 1968, p. 232).

especialmente la del conjunto potencia. La postura de Cantor ante el problema de la paradoja se basaba en una distinción que atendía a una coordenada epistemológica (Da Silva, 2013). Para nuestro autor existían colecciones a las cuales se les podía otorgar unidad, de tal forma que *generaban totalidades consistentes o conjuntos*, mientras que existían colecciones que no tenían una unidad, formando así a las *totalidades inconsistentes o absolutamente infinitas* (Torretti, 1998), es decir, las primeras pueden ser tomadas como sujeto de predicación y manipuladas de manera matemática, mientras que la segunda (como el conjunto que da lugar a la paradoja de Russell, la colección de todos los ordinales o la colección de todos los Alef) no puede manipularse matemáticamente y cuando se toma como sujeto de predicación da lugar a contradicciones. Esta postura la presenta Cantor por primera vez en una carta dirigida a Dedekind, y sostiene, haciendo gala de un platonismo absoluto, que en la realidad no existen las paradojas, sino fallas epistemológicas, es decir, las paradojas son un producto de nuestro conocimiento limitado (Da Silva, 2013).

En este punto es donde creemos es interesante introducir la perspectiva etnomatemática pues el planteamiento tendrá un matiz epistémico que ontológico en el sentido de que no se discutirá el platonismo de Cantor o la existencia efectiva, ontológica, del infinito actual o potencial. Sino que nos centraremos en la posibilidad epistémica de articular el infinito en el lenguaje y reconocer la presencia de esta noción en una lengua que solo acepta cinco dígitos. Se postulará que, en la posibilidad misma de articular este concepto, hay un meta-mensaje que intentaremos descifrar con ayuda de la perspectiva etnomatemática.

4. INFINITO COMO “SIN BORDE”

El topónimo Goio-Ên da nombre a un paraje conocido por estar en la vera del río Uruguay y por un puente que atraviesa el río y une el estado de Santa Catarina con el de Río Grande do Sul, en el sur de Brasil. Los hablantes no nativos de la lengua sostienen diferentes significados para el topónimo, la mayoría sabe “*goio”* o “*goj”* significa agua en kaingang, y a “*en”* o *“vêhn”* se le atribuye alguna propiedad posiblemente inventada, como fría, “agua fría” es una interpretación bastante común, por ejemplo. Esta interpretación fue corregida por los hablantes nativos estudiantes de las Licenciaturas Interculturales en la clase que se discutían traducciones de una lengua a otra: Goio-Ên es una forma de escribir en portugués, lo que actualmente se escribe como *goj-vêhn*, en la nueva grafía del kaingang y que quiere decir “río” o “agua sin fin". Literalmente es "agua *(goj)* sin *(vêhn)*" y los hablantes interpretan inmediatamente que es "sin fin" en el sentido de que el río corre y fluye sin límite porque no tiene un borde frontal, esta información fue confirmada por diferentes hablantes de la lengua. En cambio, laguna o azud se escribe *oré ki goj* literalmente "barro en el agua": agua barrosa o estancada justamente por encontrarse encerrada o delimitada[7]. Estas ideas ligadas a la noción de fin, sin fin, sin límite, en una lengua que tiene apenas palabras para cinco dígitos, llamó inmediatamente la atención dada la relevancia que tiene en las Licenciaturas Interculturales la perspectiva etnomatemática.

Vêhn en *goj-vêhn* aparece como un predicando que se refiere a un sujeto de predicación, en este caso del agua (*goj)*. ¿Qué predica? Las respuestas de los hablantes es que el agua no tiene fin, o fluye sin fin, porque el cauce del río no tiene borde frontal y la diferenciaron explícitamente de las lagunas o el azud típico de las zonas rurales del sur de Brasil (*oré ki goj)*, esa ausencia de fin o borde hace que el agua se mueva y fluya "sin fin", sin límite. A esto hay que sumarle que efectivamente, el río Uruguay fluye hasta su desembocadura en el Río de la Plata a casi dos mil kilómetros de Goio-Ên, por lo que la idea de un río que fluye "sin fin" y consecuentemente se extiende sin límite, parece bastante adecuada para un pueblo tradicionalmente cazador-recolector. Nótese que esta idea de fluir o extenderse sin fin tiene familiaridad con la idea más abstracta y precisa de semirrecta. Pero, además, creemos que estas ideas sirven como una buena metáfora para aproximarnos al sentido de infinito que nos interesa investigar: el acceso epistémico a esta noción y a la definición de este concepto.

Comencemos con la enunciación de la metáfora etnomatemática que guía nuestra reflexión: la noción de *goj-vêhn* y la diferencia con *oré ki goj*. La diferencia entre la forma de referirse y pensar la noción de río y a la de laguna o azud en la lengua y pensamiento kaingang.

Goj-vêhn señala al río, que, si bien parece no tener límites en su fluir, tiene un cauce y límites laterales, carece de límite solo en parte, el límite frontal, eso permite que el agua fluya de manera ilimitada. Esta descripción se muestra adecuada si se observa al río Uruguay desde las alturas de las barrancas de Goio-Ên. Aquí tenemos que ser cuidadosos con el análisis conceptual, la idea de "sin fin" en el sentido de "sin borde" sin una frontera en la parte delantera del río se confunde con un sentido similar, la del fluir "sin fin" del agua en el río. Si bien la

[7] Vale aclarar que el sentido etimógico literal de las palabras *oré ki goj* es "barro en el agua" pero su traducción al portugués o al español, es "estanque" o "azud", es decir los hablantes nativos se refieren a un estanque o asud, muy comunes en el sur de Brasil como *oré ki goj*. Un estanque se diferencia claramente de un río de la zona donde habita el pueblo Kaingang por las características de no fluir, de estar encerradas y por las características del suelo constituirse en un agua de color barroso.

ausencia de borde permite el fluir “sin fin” aguas bajo, la ausencia de borde no es lo mismo que el fluir sin fin. La ausencia de borde es lo que asociaremos aquí a lo que llamamos el infinito conceptual o lógico y que, en su límite, en su sentido de ausencia total de borde (no la ausencia parcial como en caso del río) y consecuentemente de definición, sería asimilable al infinito actual lo conceptual y totalmente infinito o en palabras de Cantor “*totalidades inconsistentes o absolutamente infinitas”,* un “concepto” absolutamente sin borde y consecuentemente sin definición.[8] El fluir, la sucesión sin fin está asociada al infinito llamado potencial o progresivo como el de la sucesión matemática de los naturales, por ejemplo. La ausencia completa de borde y, consecuentemente, de definición del concepto de infinito en sí mismo, lo hace epistémicamente inasible y consecuentemente paradójico.

Oré ki goj, significa “barro en el agua” literalmente, pero también agua barrosa o agua estancada, y se traduce como laguna, estanque o azud. Es decir, el agua no fluye porque el estanque tiene sus límites cerrados, su borde está complemente delimitado, encierra el agua y no permite que fluya.

Una primera idea nos sugiere que una definición al estilo *oré ki goj,* completamente delimitada y cerrada en su significado, es mejor que la de *goj-vêhn*. En el sentido de que, en toda buena definición de un concepto, los límites de su significado están claros al igual que los bordes de un estanque, a diferencia de los límites del río que tiene un elemento impreciso o indefinido pues al río le falta, al menos, un borde. Una buena definición sería, de acuerdo con este criterio, aquella que logra delimitar claramente el significado de una palabra, así como un borde delimita completamente un azud. Una buena definición tendrá sus límites completamente claros. La definición de río como *goj-vêhn,* en cambio, tendría un déficit: hay al menos un aspecto indefinido de la misma.

Esta evaluación puede ser errónea, hay buenas definiciones que dejan algún aspecto indefinido, en caso de que lo requiera el objeto de la definición. Por ejemplo, la definición de río como “agua sin fin” se refiere a un objeto que tiene un parámetro sin definir, el río no tiene fin, nunca termina, fluye y se extiende indefinidamente en el territorio, al menos en la concepción kaingang, como una semirrecta lo hace en el espacio euclidiano. Goio-Ên además de un

[8] Es importante aclarar que la noción de *goj-vêhn* entendida como “sin borde” puede tomarse como una analogía de infinito potencial en el sentido de que el rio se extiende sin borde frontal (al estilo de una semirrecta o de una sucesión infinita de números), pero con bordes laterales, con cause por qo que no es completamente sin borde sino solo parcialmente. Pero igualmente puede pensarse esta idea llevada al extremo que sería lo completamente sin bordes, ninguno ni laterales ni frontales, algo asimilable a “*totalidades inconsistentes absolutamente infinitas”.*

topónimo y un nombre en lengua indígena para esa parte del río Uruguay, es el límite entre los estados de Santa Catarina y Río Grande do Sul, como más al sur es límite entre Argentina y Brasil y luego entre Argentina y la República Oriental del Uruguay. Parece que no solo es una buena definición, sino que puede ser utilizada para definir de manera muy eficiente límites geográficos. Para esto se utilizan los bordes bien definidos del río, es decir los bordes laterales. No podría utilizarse el borde frontal pues, en la concepción kaingang, no lo tiene.

Pero hay otros objetos bien definidos que, en algún aspecto, son infinitos. Los números naturales son un buen ejemplo, están bien definidos en sus características y propiedades. Russell señala que: "Definimos los números naturales como aquellos como aquellos a los que puede aplicarse la prueba por inducción matemática, es decir, aquellos que gozan de todas las propiedades inductivas" (Russell, 1956, p. 110). El inglés sostenía que el axioma de Peano que define la inducción matemática para los naturales es en realidad la propiedad que define a esos números a los que propone llamar entonces "números inductivos". El conjunto de los naturales perfectamente definidos es, sin embargo, infinito en un aspecto: la cardinalidad. El conjunto de los naturales no tiene un número limitado o finito (definido) de miembros sino ilimitado o infinito. Le falta un borde que le ponga un fin al "fluir" de los naturales (n, n+1, n+1+1,...) así como le falta el límite frontal al río de los kaingang. Este aspecto indefinido, sin embargo, no es obstáculo alguno para operar con los naturales. Incluso, gracias al paraíso que Cantor creó para nosotros, se puede operar con el cardinal de los naturales y establecerse estrictamente que tiene la misma cardinalidad que alguno de sus subconjuntos, o que es igual a la de los racionales y menor que la de los reales. La dificultad que subsiste, aún en este paraíso, no es la de operar con ciertos conjuntos infinitos, sino la de operar con el concepto de infinito en sí mismo, porque este concepto, como postularemos a continuación encierra una paradoja al estilo Russell, conocida popularmente por la formulación como la paradoja del barbero. Sostenemos, a partir de la evidencia de que un leguaje con cinco dígitos contiene la noción de infinito, que operar con el concepto de infinito en sí mismo es una operación más lógico-lingüística que matemática y que, esta manera más simple pero también más general y abstracta de entender lo infinito como "completamente sin borde" y consecuentemente como completamente "sin definición", excede la problemática de lo infinitamente grande o infinitamente pequeño, o cuestiones matemáticas de cardinalidad u ordinalidad de conjuntos.

5. PREDICAR INFINITO EN SÍ MISMO

Conjeturamos que el concepto de infinito en sí mismo, o lo actual y completamente infinito constituye un caso similar de a la paradoja de Russell de acuerdo con cómo fue enunciada en su carta a Frege de 1902:

> Yo también creí eso antes [se refiere a la idea intuitiva de que un conjunto se forma a partir de un predicado propuesta por Frege], sin embargo, esa idea parece ahora dudosa a causa de la siguiente contradicción: sea *w* el predicado de ser un predicado que no puede ser un predicado de sí mismo ¿Se puede predicar *w* de sí mismo? A partir de cada respuesta se sigue su contradicción, por lo que es necesario concluir que *w* no es un predicado (Frege, 2017, p. 256-257)

Si se predica infinito del concepto de infinito en sí mismo, en este sentido simple e intuitivo que hemos propuesto: sin fin, completamente sin límite, completamente sin borde, implica que definiremos este concepto como: "sin definición". Entendemos entonces lo infinito en sí mismo, (lo completa y actualmente infinito), como lo "completamente sin definición", con lo cual evidentemente caemos en una contradicción o en un caso típico de paradoja: lo estamos definiendo como "sin definición" por lo tanto, en cualquier caso, desembocaríamos en una contradicción: si tiene definición entonces no tiene definición, si no tiene definición entonces está definido. La noción de infinito sería un típico caso del predicado "w" y quizás el predicado "w" por excelencia, en tanto un predicado que puede predicarse de otros por ejemplo de la cardinalidad del conjunto de los números naturales o de la manera de fluir del agua en un río, pero no puede predicarse de sí mismo sin contradicción.

El propio Russell señala en sus memorias la vinculación entre las nuevas ideas de Cantor y su paradoja:

> Cantor tenía una demostración de que no existe un número máximo, y a mí me parecía que el número de todas las cosas en el mundo tenía que ser el máximo posible. De acuerdo a ello, examiné su demostración con cierta minuciosidad, e hice un esfuerzo por aplicarla a la clase de todas las cosas que existen. Esto me condujo a considerar a las clases que no son miembros de sí mismas, y a preguntar si la clase de tales clases eso no es un miembro de sí misma. Encontré que cualquier respuesta implica su contraria (Russell, 1968, p. 232).

Vale hacer una aclaración, podríamos distinguir entre dos predicados que formarían diferentes clases, "lo que tiene algún aspecto infinito o sin definir o sin limitar", como el número máximo en la sucesión de los naturales, o la extensión de una semirrecta, o el río de los Kaingang, y "lo completamente infinito que carece de cualquier límite o definición". Si se sostiene que existe algo como lo completamente infinito, al límite de no ser incluso susceptible de definición como concepto y lo expreso a través del lenguaje, entonces lo estoy definiendo y cayendo en una inconsistencia. Para expresar esta inconsistencia de una manera casi trivial: estaríamos intentando hablado de aquello que por definición (o incluso por etimología), no tiene definición. Irónicamente esta noción de infinito parece mostrarlos un "límite" para nuestro lenguaje, no es que no podamos hablar de ello, pues lo estamos haciendo, sino que no podemos hacerlo de una manera consistente. Constituye una situación equivalente a la paradoja de Epímides, del mentiroso, o la del barbero.

Una solución posible para esta paradoja es la dada por Russell para su própria paradoja, establecer “tipos lógicos” impedir que la propiedad o predicado se aplique a sí misma y renunciar a la definición de lo completamente infinito en sí mismo. En pocas palabras debemos renunciar a definir aquello que, por definición, no tiene definición o como sugiere la última frase del Tractatus: “de lo que no se puede hablar hay que callar” (Wittgenstein, 1994, p. 183). La falla epistémica postulada por Cantor parece ser certera, hay alguna noción de infinito que se escapa a cualquier constructo teórico, incluidas las refinadas categorías que constituyen su paraíso. A pesar de que el escepticismo se impone tal vez resten algunas palabras que decir.

5. A MODO DE CONCLUSIÓN: EL LÍMITE EPISTÉMICO O LA DIFERENCIA ENTRE MAPA Y TERRITORIO

Creemos que la noción de infinito, tienen encriptado un mensaje que puede ser explicitado y que este mensaje es el siguiente: un lenguaje no puede ir más allá de sus definiciones sin caer en contradicción. La acepción lógicamente más simple de la palabra infinito que postulamos y la posibilidad de enunciarla en un lenguaje encripta un mensaje para el propio lenguaje: tu límite, tu borde, son tus definiciones, no puedes ir más allá de ellas.

Teniendo en cuenta que Goio-Ên es un topónimo, es decir una marca geográfica, volvamos al mapa de Royce: hacer un mapa de Inglaterra sobre una cierta parte de la propia Inglaterra. Si el mapa está perfectamente hecho, proporcionará una perfecta correspondencia de uno a uno con su original, de este modo nuestro mapa (parte de Inglaterra), estaría en una correspondencia uno a uno con el todo (Inglaterra). La parte deberá tener el mismo número de puntos que el todo, este número sería entonces un número reflexivo. Pero el mapa debería tener un mapa del mapa, que debería tener un mapa del mapa del mapa y así sucesivamente *ad infinitum.*

El lenguaje, en su uso descriptivo o informativo que es el relevante cuando tratamos temas epistémicos, nos permite construir diferentes mapas de la realidad, describir y nombrar un río, definir los números naturales, describir Inglaterra y el mapa que describe a Inglaterra, etc. Podemos modelar la realidad y esto nos resulta útil, pues en general manipular el modelo es más fácil que manipular el objeto real: el mapa me permite conocer la geografía de Inglaterra, saber dónde están sus ciudades, montañas etc, aún sin haber pisado ni una vez suelo inglés. Si quisiera tener una representación completamente exacta punto por punto, detalle a detalle de Inglaterra, no se entiende por qué la representación sería más simple y fácil de manipular o comprender que la propia Inglaterra. Si fuera una representación perfecta absolutamente, tendría el mismo aroma, la misma forma, la misma gente, que Inglaterra, incluso tendría a alguien queriendo representar a Inglaterra, la única representación completa y perfecta de Inglaterra es Inglaterra, y ya no sería una re-presentación sino Inglaterra presentándose a sí misma, siendo ella. Todo mapa, toda representación simbólica, toda teoría carece de algo respecto al objeto real representado, abstrae algo, lo simplifica: es incompleta respecto al objeto representado, no puede ir más allá de sus conceptos, de sus definiciones, porque más allá está lo completamente real, aquello que no es completamente alcanzado por nuestros conceptos (lo in-finito, no-definido y, contradictoriamente, no susceptible de definición) y a lo que no podemos acceder completamente apenas representándolo, tal vez sea accesible a través de alguna experiencia mística, una intuición divina del todo, pero eso estaría también fuera del alcance de nuestras definiciones, sobre eso también sería necesario callar.

Creemos que ese es el mensaje encriptado en la noción de infinito plateado explica por qué una lengua como la kaingang con apenas cinco palabras para los primeros cinco números, que no alcanzan para contar siquiera los dedos de ambas manos, pueda, sin embargo, predicar infinito. Lo infinito en sí mismo es una noción lógico-lingüística más que específicamente matemática, predica lo no definido, no delimitado y, también, en el límite, lo completamente sin definición y no susceptible de definición haciéndonos caer en una contradicción. Mientras el mapa se aplique al territorio, es decir, el concepto se refiera a objetos que queramos definir como un río o un tipo numérico, puede funcionar y sernos útil, pero cuando el mapa quiera referirse a la realidad completa (que lo incluye), tarde o temprano fallará: el mapa nunca va a contener al territorio, el lenguaje nunca va a contener a la realidad completa, nuestras representaciones son también parte de la realidad, si queremos representar todo, incluso nuestras representaciones y a nosotros representando la realidad, caemos en el loop eterno, la noción de infinito encripta ese mensaje, señala ese límite, aceptarlo y dejar de pensar en ello puede incluso contribuir a nuestra salud mental.

REFERENCIAS

Aristóteles, (1999). *Metafísica*. (P. Azcárate, Trans.) Alicante: Biblioteca Virtual Miguel de Cervantes. http://www.cervantesvirtual.com/nd/ark:/59851/bmczp411.

Bernardi, L. y Santos, J. (201 8). Etnomatemática y Pedagogía Freireana: una experiencia intercultural con la comunidad Kaingang. *Zetetiké*, 26 (1), 147-166. doi.org/10.20396/zet.v26i1.8650727

Bernardi, L. y Santos, J. (2021). Math Education in Intercultural Contexts: a logical-mathematical interpretation for duality Kaingang Kamé-Kairu. *Ciência & Educação*, 27 (1), 1-13. doi.org/10.1590/1516-731320210011.

Blanco-Álvarez, H. (2008). Entrevista al profesor Ubiratan D'Ambrosio. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática*, 1(1), 21-25.

https://www.revista.etnomatematica.org/index.php/ RevLatEm/article/view/3.

Cancino, N. (2018) Lo abstracto y lo concreto de las lenguas indígenas según las gramáticas misioneras del Arzobispado *Limense, siglos XVI y XVI.*, 11(1), 6-23. https://revistas.udea.edu.co/index.php/mutatismutandis/article/view/330790

Cantor, G. (1895), Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, *Mathematische Annalen* , Vol. XLIV: 481–512. https://doi.org/10.1007/BF02124929

Cantor G, (1883/2006), *Fundamentos para una teoría general de conjuntos*. Editorial Crítica:.

Cruz-Artieda, M.E. (2016) Lo infinito y la forma: La Etnomatemática y la obra plástica de Estuardo Maldonado. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 9(1), 71-83.: https://revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/246/232

Da Silva, R. (2013). Un acercamiento al platonismo absoluto de Cantor. *Apuntes filosóficos*. 22 (42), 24-39. http://saber.ucv.ve/ojs/index.php/revaf/article/view/5651.

D'Ambrósio, U. (1993). Etnomatemática: um programa. *Educação Matemática em Revista*, 1 (1), 5-11. https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/article/view/1936

Frege, G. (2017). *Escritos lógico-filosóficos* Colihue.

Gilmer, G. (1995) Una definición de etnomatemática. Boletín ISGEm, v.11, n. 1, p. 188. En Blanco Albarez, H. (2005) (Comp.). Boletines del grupo de estudio internacional de

DOI: https://doi.org/10.22267/relatem.25181.110

Etnomatemática: ISGEm, 1985-2003.
http://www.etnomatematica.org/home/?page_id=112.

Hilbert, D. (1993). Sobre lo infinito. En G. W. Hartmann & M. Werle (Eds.), *La teoría de conjuntos y el infinito* (pp. 91-96). Alianza Editorial.

Miarka, R. (2011). *Etnomatemática: do ôntico ao ontológico.* (Tese de Doutorado*).* Instituto de Geociências e Ciências Exatas – Universidade Estadual Paulista. Rio Claro.

Russell, B. (1956). Introducción a la filosofía matemática. En Russel, B. (1956). *Obras escogidas.* Aguilar.

Russell, B. (1968). *La autobiografía de Bertrand Russell.* Aguilar.

Santos, J. y Bernardi, L. (2019). Una Interpretación Lógico-matemática para Dualidad Kaingang. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática.* 12 (1), 44-60. http://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/468.

Santos, J., Bernardi, L. y Nascimento, M. (2020). Algoritmos y sistemas de parentesco: aproximaciones etnomatemáticas en la formación de profesores indígenas. Boletim de Educação Matemática. *Bolema*, 34 (67), 628-650. doi.org/10.1590/1980-4415v34n67a14.

Tamariz, A. (2002). Los infinitos: el paraíso de Cantor. *Revista Ciencias,* 68 (Out), 66-77. https://repositorio.unam.mx/contenidos/27623.

Torretti, R. (1998). *El paraíso de Cantor. La tradición conjuntista en la filosofía de la matemática,* Editorial Universitaria.

Wittgenstein, L. (1994). *Tractatus logico-philosophicus.* Atalaya.